Cahier de vacances

Consignes :

Tout au long des exercices qui suivent vous devez avoir à l'esprit les attendus du programme (ECG1, ECG2). En particulier, lorsque vous faites un exercice, vous ne devez pas simplement le comprendre « globalement »mais vous devez savoir comment le rédiger dans les moindres détails. Aux concours, vous allez passer un écrit et (pour la plupart d'entre vous) pas d'oral. Les règles du jeu sont donc annoncées dès le début dans les rapports de jury ; documents que je vous conseille vivement d'aller consulter (ici par exemple). Il est clairement stipulé, que la présentation, la clarté et la rigueur dans les raisonnements sont des points extrêmement valorisés ou à l'inverse, extrêmement pénalisés. Il est donc totalement inutile de s'écrier « c'est bon, j'ai compris ! »tel exercice ou telle notion de cours avant que vous ne soyez sûrs à 100% que vous en connaissiez les moindres détails de rédaction. En fait, plus votre raisonnement s'attachera aux détails, plus vous vous sentirez obligés de comprendre en profondeur les énoncés de cours et le cercle vertueux pourra se poursuivre. Dans le cas inverse d'un raisonnement superficiel, il ne faudra pas s'étonner que le correcteur vous attribue une note, elle aussi, superficielle ...

Vous trouverez ci-dessous une (longue) liste de savoir-faire essentiels résumant votre première année en maths. Je considère que ce sont les points essentiels sur lesquels je vais devoir m'appuyer à la rentrée et qui vous permettront de poursuivre correctement en deuxième année. Je ne m'attends bien sûr pas à ce que vous survoliez tout ça mais ce sont les points que vous devez réviser en priorité pendant l'été. Certains ont un lien vers un site (Khan Académie ici là) sur lequel des vidéos ou des exercices d'entrainements vous sont proposés. Vous pouvez vous inscrire sur ce site de référence pour l'apprentissage des mathématiques. Le site est très bien fait même s'il est plus destiné à des élèves du 2aire (collège-lycée) que du post-bac.

Je tiens à jour un site ici sur lequel vous pourrez retrouver l'ensemble des documents de révision pour ces vacances. Vous trouverez en plus de ces exercices des fiches d'exercices corrigés de soutien de 1ère année sur des thèmes fondamentaux. N'hésitez pas à vous en servir de support.

Prenez du temps pour bien décompresser, les vacances sont faites pour ça ! En revanche il est fondamental de se remettre au travail au moins 3 semaines avant la rentrée.

Les exercices ne sont pas facultatifs et sont à me rendre au propre le jour de la rentrée.

Je serais tolérant si vous me rendez 75% des exercices de chaque section du document.

Je vous souhaite à toutes et à tous de passer de bonnes vacances et espère vous retrouver reposé-e-s et plus motivé-e-s que jamais à la rentrée !

LES SAVOIR-FAIRE ESSENTIELS D'ECG1

Le programme en maths appliquées porte essentiellement sur trois thèmes principaux avec des applications algorithmique en Python :

1. **L'ANALYSE :** ce thème est composée des sous-thèmes suivants dont il est crucial pour la suite de maîtriser les savoir-faire :

   - sur les fonctions : savoir dresser le tableau de variation d'une fonction sur son domaine de définition en justifiant bien toutes les étapes, savoir utiliser le théorème de la bijection de façon rigoureuse, savoir utiliser les croissances comparées à bon escient pour un calcul de limite, savoir démontrer qu'une fonction est continue en un point par un calcul de limite (fondamental $\rightsquigarrow$ là), savoir démontrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point par un calcul de limite, savoir démontrer qu'une fonction est dérivable en un point en utilisant le taux d'accroissement de la fonction, connaitre les applications principales de la dérivation (fondamental $\rightsquigarrow$ là), fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle, savoir utiliser rigoureusement l'inégalité des accroissements finis pour obtenir un encadrement, savoir étudier la convexité d'une fonction sur un intervalle.
   - Python sur les fonctions : savoir écrire une fonction permettant représenter graphiquement une fonction (`x=np.linspace(0,1,200)` puis `y=[f(t) for t in x]` puis `plt.plot(x,y)`), savoir écrire une fonction donnant une approximation d'une valeur d'une solution d'une équation du type $f(x) = 0$ à l'aide de l'algorithme de dichotomie.
   - sur les suites : connaître les méthodes associées aux suites usuelles (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique, récurrente linéaires d'ordre deux), convergence et divergence d'une suite (fondamental $\rightsquigarrow$ là), savoir se ramener aux croissances comparées pour déterminer la limite d'une suite, savoir étudier les variations d'une suite (par récurrence, en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1), savoir démontrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée (par récurrence la plupart du temps), savoir utiliser le théorème de convergence monotone pour prouver la convergence d'une suite, savoir utiliser le théorème d'encadrement, savoir utiliser une comparaison pour démontrer la divergence d'une suite vers l'infini, connaitre les limites usuelles lorsque $u_n \to 0$:
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{u_n}-1}{u_n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1+u_n)^\alpha - 1}{u_n}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.
   - Python sur les suites : savoir écrire une fonction permettant de calculer un terme ou une liste de termes d'une suite (boucle `for k in range(n):`), savoir écrire une fonction permettant de représenter une liste termes d'une suite (`u=[suite(k) for k in range(100)]` puis `plt.plot(u)`), savoir écrire une fonction permettant de calculer un entier à partir duquel une condition de type $u_n > A$ est réalisée (boucle `while u<= A :`), savoir écrire une fonction permettant de calculer une somme (`S+=S...`).
   - sur les séries : connaître par coeur les critères de convergence des séries usuelles (séries géométriquesx3, séries exponentielles, séries de Riemann) et leur somme lorsque c'est possible (fondamental $\rightsquigarrow$ là), savoir déterminer la nature d'une série en étudiant la suite des sommes partielles, savoir déterminer la nature d'une série en se ramenant à des séries de référence, savoir déterminer la nature d'une série par comparaison de son terme général avec celui d'une série de référence (fondamental $\rightsquigarrow$ là)
   - sur l'intégration : connaitre son formulaire de primitives par coeur, savoir calculer une intégrale par primitivation (fondamental $\rightsquigarrow$ là), par intégration par parties (fondamental $\rightsquigarrow$ là) et par changement de variables.
   - sur les équations différentielles : savoir démontrer qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle, savoir déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants (formule à connaitre par coeur).

2. **LES PROBABILITÉS ET STATISTIQUES :** ce thème est composée des sous-thèmes suivants dont il est crucial pour la suite de maîtriser les savoir-faire :

   - sur les statistiques : connaître le vocabulaire : population, individu, échantillon, caractère, série statistique, effectifs, fréquences, fréquences cumulées, étendue, moyenne, médiane, quartile, interquartile, variance, écart-type (fondamental $\rightsquigarrow$ là).

- sur les probabilités en général : connaitre le vocabulaire des probabilités (univers Ω, événement contraire $\overline{A}$, union, intersection, incompatibilité, indépendance...), savoir appliquer la formule du crible de Poincaré pour $P(A \cup B)$ et $P(A \cup B \cup C)$, connaitre par coeur la formule des probabilités composées, savoir décrire un événement à l'aide d'événements élémentaires, calculer une probabilité dans une situation d'équiprobabilité (cardinal de A sur cardinal de Ω), savoir utiliser les coefficients binomiaux (fondamental $\rightsquigarrow$ là), savoir modéliser des tirages simultanés ou successifs avec ou sans remise, reconnaitre une situation où l'on doit utiliser une probabilité conditionnelle (fondamental $\rightsquigarrow$ là) savoir utiliser la formule des probabilités totales (fondamental $\rightsquigarrow$ là).

(a) sur les variable aléatoires : savoir déterminer le support et la loi d'une variable aléatoire (fondamental là), connaitre par coeur les éléments caractéristiques des lois usuelles discrètes (lois uniformes, lois de Bernoulli, lois binomiales, lois géométriques et loi de Poisson), reconnaître une situation où une loi usuelle est en jeu (hormis la loi de Poisson), savoir démontrer qu'une variable aléatoire admet une espérance en montrant la convergence d'une série, savoir démontrer qu'une variable admet une variance en montrant la convergence d'une série et en appliquant la formule de Koenig-Huygens, savoir appliquer le théorème de transfert dans des cas simples, savoir démontrer l'indépendance de deux variables aléatoires.

- Python : savoir écrire une fonction permettant de représenter graphiquement une série statistique sous forme d'un histogramme ou d'un diagramme en bâtons (`matplotlib.pyplot as plt hist.plt(x)` ou `bar.plt(x)`, savoir écrire une fonction permettant de simuler une variable aléatoire discrète (`import random as rd` $\rightsquigarrow$ `rd.random(), rd.randint(), rd.geometric(), rd.poisson()`), savoir écrire une fonction permettant de donner une estimation de l'espérance d'une variable aléatoire, savoir écrire une fonction permettant d'afficher une liste de N simulations d'une variable aléatoire ($\rightsquigarrow$ `[simuleX() for _ in range(N)]` simule N variables aléatoires suivant la même loi que X une variable aléatoire dont la fonction `simuleX()` réalise une simulation).

3. **L'ALGÈBRE LINÉAIRE :** ce thème est composée des sous-thèmes suivants dont il est crucial pour la suite de maîtriser les savoir-faire :

   - sur les systèmes linéaires : connaître le vocabulaire (solution, ensemble des solutions, coefficients, système de Cramer), savoir résoudre un système linéaire à l'aide de la méthode du pivot de Gauss (fondamental $\rightsquigarrow$ là).
   - sur les matrices : connaître le vocabulaire : matrice nulle, matrice identité, matrice triangulaire supérieure, inférieure, matrice diagonale, matrice symétrique, savoir déterminer le produit de deux matrices lorsque c'est possible, savoir utiliser la formule du binôme de Newton matriciel de façon rigoureuse (fondamental $\rightsquigarrow$ là), savoir démontrer qu'une matrice est inversible par différente méthodes (fondamental $\rightsquigarrow$ là), cas particulier des matrices 2×2 (fondamental $\rightsquigarrow$ là), traduction matricielle d'un système linéaire et lien entre inversibilité de la matrice associée et système de Cramer, savoir déterminer la transposée d'une matrice, dune somme ou d'un produit de matrices.
   - Python sur les matrices : connaître la bibliothèque `numpy` associée aux matrices $\rightsquigarrow$ `A=np.array([[1,1,1],[0,1,0],[1,1,1]])` ou `np.zeros(3),np.eye(3)`, savoir calculer le produit matriciel `np.dot(A,B)`, savoir déterminer l'inverse d'une matrice ou le rang d'une matrice à l'aide des commandes `al.inv` ou `al.rank`.
   - sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$: connaître le vocabulaire (vecteurs, famille de vecteurs, combinaisons linéaires), savoir montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'une famille de vecteurs (fondamental $\rightsquigarrow$ là), savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, connaître la définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, savoir démontrer qu'une famille de vecteurs est libre ou liée (fondamental $\rightsquigarrow$ là), une base (fondamental $\rightsquigarrow$ là), savoir calculer le rang d'une famille de vecteurs et faire le lien avec le rang d'une matrice (fondamental $\rightsquigarrow$ là).
   - sur la théorie des graphes : vocabulaire des graphes (sommets, arêtes, arcs, degrés, graphes simples, complets, réguliers, chaîne, cycles, graphes pondérés, distance dans un graphe), savoir utiliser la formule d'Euler pour déterminer une donnée manquante (nombre de sommets ou nombre d'arêtes), savoir déterminer la matrice d'adjacence d'un graphe, savoir déterminer le nombre de chaînes de longueur donnée dans un graphe, savoir démontrer qu'un graphe est connexe à l'aide des puissances de sa matrice d'adjacence, savoir appliquer l'algorithme d'Euler pour déterminer un chemin eulérien dans un graphe connexe, savoir appliquer l'algorithme de Djistkra pour déterminer un plus court chemin dans un graphe connexe pondéré (là).

- Python sur les graphes : savoir écrire une fonction permettant de calculer les degré d'un graphe donné par sa matrice d'adjacence, savoir déterminer un graphe à l'aide de sa liste d'adjacence.

EXERCICES

Calcul

Exercice 1 (Classique)**.** Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x+y-3z-t=0 \\ 2x+y-5z+4t=4 \\ x-2y+3t=-2 \\ -x+y+z-2t=-1 \end{cases}$$

Exercice 2 (Classique)**.** Montrer de deux manières différentes (par récurrence, puis à l'aide des formules de sommes usuelles) que

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(2k^2-1\right) = \frac{n(n+1)\left(n^2+n-1\right)}{2}$$

Exercice 3 (Classique)**.** Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0;n]\!]$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 4 (Technique)**.** Montrer, par la méthode de votre choix, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq p+1$,

$$\sum_{k=p}^{n-1}\binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$$

Exercice 5 (Technique)**.** Calculer les sommes doubles suivantes

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min\{i,j\} \quad \text{et} \quad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{j}$$

Analyse.

Exercice 6. Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 7 (Subtil)**.** Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Indication : passer à la forme exponentielle et utiliser une limite usuelle.

Exercice 8 (Classique)**.** Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$ est croissante, majorée par 1 et donc convergente vers une limite à préciser.

Exercice 9 (Costaud)**.** Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 1, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Indication : on commencera par montrer f est continue en 0 . Puis, après avoir justifié que f dérivable en dehors de 0 on calculera $f'(x)$, pour $x \neq 0$. On montrera que f dérivable en 0 , à l'aide du développement limité à l'ordre 2 ci-dessous et enfin que f' est continue en 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Exercice 10 (Classique)**.** Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

Exercice 11.

1. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t)$$

2. Soit c un réel. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est solution particulière de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}$$

3. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}$$

Exercice 12 (Classique)**.** Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

Indication : on essaiera de faire apparaître une somme télescopique.

Exercice 13 (Classique)**.** Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de a_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 14 (Classique)**.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\exp\left(x^2\right)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser et donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} en 0 .

Exercice 15 (Technique)**.** Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$

Exercice 16 (Technique)**.** Calculer les intégrales :

1. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ (primitivation).
2. $\displaystyle\int_0^1 te^{-2t}dt$ (IPP)
3. $\displaystyle\int_1^e t^2\ln(t)dt$ (double IPP)
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{3t-1}, \quad (u = 3t-1)$
5. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x, \quad (u = 1+e^x)$

Exercice 17. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{puis en déduire} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 18 (Costaud)**.** Soit $x \in [0, 1[$ fixé.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$

2. Utiliser une technique similaire à l'exercice précédent pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$$

3. Que pouvez-vous en déduire sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ et la valeur de sa somme ?

Exercice 19 (Python classique)**.** Écrire un programme qui calcule et affiche petit entier N tel que $u_N \geq A$, où la suite (u_n) est définie par

$$u_0 = 2, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \exp(u_n) - e\ln(u_n)$$

Exercice 20 (Python technique)**.** Écrire un programme de dichotomie permettant de donner une valeur approchée à 10^{-4} de la solution de l'équation $e^x + x = 3$.

Exercice 21 (Python technique)**.** Écrire un programme permettant de calculer le terme u_n où la suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n$$

Représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite $\left(\frac{u_n}{3^n}\right)$. Interpréter.

Algèbre Linéaire.

Exercice 22 (Classique)**.** Déterminer soigneusement, par la formule du binôme, les puissances A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23. On considère la matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. À l'aide du pivot de Gauss, vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de A et de I.

Exercice 24 (Technique)**.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Résoudre les équations $AX = 0, AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On présentera les solutions sous forme d'espace vectoriel engendré par une famille (finie) de vecteurs.

Exercice 25. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 26 (Classique)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Calculer $(I_n - A)\left(I_n + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}\right)$.
2. En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 27 (Technique)**.** Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle qu'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si* $ad - bc \neq 0$.

Exercice 28 (Costaud)**.** Pour chacune des matrices M suivantes, déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Pour chaque valeur λ trouvée, résoudre $(M - \lambda I)X = 0$ où $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,
2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,
3. $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 29 (Classique)**.** Montrer que la famille de vecteurs ci-dessous forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\big((-1,0,0),(1,-1,0),(-1,1,-1)\big)$$

Exercice 30. Sans aucun calcul, déterminer le rang de la matrice ci-dessous.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Probabilités (élémentaires).

Exercice 31 (Classique)**.**

1. Montrer que, si C et D sont deux événements d'un même espace probabilisé, alors
$$P(C \cup D) \leq P(C) + P(D)$$
2. En déduire que, si (A_j) est une suite d'événements du même espace, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Exercice 32 (Classique)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Montrer, par récurrence sur n (et à l'aide de la formule du crible) que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1)$$

Variables aléatoires réelles.

Exercice 33 (Classique)**.** Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. Montrer $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

Exercice 34 (Technique)**.** Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Montrer, à l'aide de la formule du binôme, que $E(X) = np$.

Exercice 35 (Technique)**.** Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ? On proposera deux démonstrations.

Exercice 36 (Costaud)**.** Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$. Monter que

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j)$$

Exercice 37 (Technique)**.** On effectue des tirages sans remise d'une boule dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer soigneusement que $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1; N]\!])$.

Exercice 38 (Technique)**.** Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{1}{p}$.

Exercice 39 (Costaud)**.** Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On suppose que, sachant $(X = n)$, la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Montrer que $Y \hookrightarrow P(p\lambda)$.

Indication : on utilisera la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\big((X = n)\big)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 40 (Costaud)**.** Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Montrer que $\min(X, Y) \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - (1-p)^2\right)$.

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i)P(Y = j)$$

On commencera par calculer $P(X \geq k)$, puis, notant $Z = \min(X, Y)$, $P(Z \geq k)$ et on utilisera le fait que,

$$P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1)$$

Indication : On rappelle que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites indépendantes si et seulement si pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i)P(Y = j)$$

On commencera par calculer $P(X \geq k)$, puis, notant $Z = \min(X, Y)$, $P(Z \geq k)$ et on utilisera le fait que,

$$P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1)$$

Algorithmique Python.

Exercice 41 (Technique)**.** Compléter la fonction `tri(L)` ci-dessous qui prend en argument une liste `L` et renvoie une liste dont les éléments sont ceux de `L` listés par ordre croissant.

```python
def tri(L):
  n=len(L)
  for i in range (n):
    i_min=i
    for j in range(i+1,n):
      if L[j]<L[i_min]
        i_min= ........
    aux=L[i]
    L[i]=.....
    L[i_min]=.....
  return L
```

Exercice 42 (Classique)**.** Écrire une fonction `recherche(x, L)` qui prend en argument un réel `x` et une liste `L` (déjà triée par ordre croissant) dont on sait que le premier terme est inférieur ou égale à `x` et le dernier supérieur (strict) à x et qui renvoie le plus grand terme de la liste `L` qui soit inférieur ou égal à `x`.

Exercice 43 (Technique)**.** Écrire une fonction `selection(L)` qui prend en argument une liste L et renvoie un élément x sélectionné uniformément au hasard dans `L` et une nouvelle liste `U` obtenue à partir de `L` en retirant `x`.

Exercice 44 (Technique)**.** Écrire une fonction `symetrie(P,Q)` qui prend en argument deux listes de mêmes longueurs `P=[p_0, ... , p_n]` et `Q=[q_0, ..., q_n]` et qui calcule et renvoie la valeur de la somme S où

$$S = \sum_{i=0}^{n} p_i q_{n-i}$$

Exercice 45 (Technique)**.** Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3 et S_4 et change d'état de la manière suivante :

— à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé,

— Si à l'instant $t = n$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable.

— Si à l'instant $t = n$, le spot S_k est allumé $(2 \leqslant k \leqslant 4)$, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume

Écrire une fonction `spot()` (sans argument) qui simule la variable aléatoire X.

Exercice 46 (Costaud)**.** Écrire une fonction `ordre_inverse(x)` qui prend en argument un nombre entier `x` et renvoie le nombre composé des mêmes chiffres que `x` mais dans l'ordre inversé. Par exemple, on veut que `ordre_inverse(8973)` renvoie 3798 .
Indication : il sera utile de considérer la variable `x` comme de type chaîne de caractères. On pourra commencer par écrire une fonction `taille(x)` qui renvoie le nombre de chiffre dont `x` est constitué.

EXTRAITS DE CONCOURS

Exercice 47 (Classique)**.** Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n qui à tout réel x associe le nombre

$$f_n(x) = n - xe^x$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$. Cette solution sera notée u_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant $f_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas convergente. Qu'en déduit-on sur sa limite ?
4. Déterminer u_0.
5. Proposer un programme Python permettant de calculer et d'afficher une valeur approchée à 10^{-3} de u_1.

Exercice 48 (Technique)**.** On considère la fonction f, dont la courbe est notée C_f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 2 + \exp(-x)$$

1. (a) Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

   (b) Montrer que la courbe C_f admet en $+\infty$ une droite asymptote Δ d'équation $y = x - 2$.

   (c) Calculer

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \text{puis} \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Monter que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ admet exactement deux solutions α et β telles que $\beta < 0 < \alpha$.
   On donne $e \approx 2,7$. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.
4. Tracer l'allure de C_f et Δ. On donne $\alpha \approx 1,84$ et $\beta \approx -1,14$.
5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - \exp -x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.
   (b) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.
   Montrer alors que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.
   (c) Établir que pour tout réel x appartenant à $[1, 2] : 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$.
   (d) En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$$

   (e) Montrer par récurrence que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{\exp(n)}$$

   Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.
   (f) Écrire un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Exercice 49 (Technique)**.** Pour tout entier n on note :

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n dx$$

1. (a) Former le tableau de variation sur $[0, 1]$ de $x \to xe^{-x^2}$.
   (b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}$$

   (c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}$$

   (b) En déduire la limite de I_n et celle de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 50 (Costaud)**.** Un après-midi de canicule, vous êtes allongé sur le canapé du salon de votre appartement, composé de deux pièce (une chambre et un salon). La fenêtre du salon est ouverte. Une mouche se balade tranquillement dans l'appartement en produisant ce bruit bien agaçant comme les mouches savent le faire ; ce qui perturbe votre sieste. Au départ, la mouche se trouve dans le salon à chaque seconde, elle se déplace en suivant le protocole suivant :

1. Si elle est dans le salon, elle y reste avec probabilité $1/2$, sort de l'appartement par la fenêtre ouverte avec probabilité $1/4$ ou va faire un tour dans la chambre avec probabilité $1/4$.
2. Si elle est dans la chambre, elle y reste avec probabilité $3/4$ ou retourne dans le salon avec probabilité $1/4$.
3. Une fois qu'elle est sortie, vous fermez la fenêtre et elle va embêter quelqu'un d'autre.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire qui vaut 0,1 ou 2 selon si la mouche se trouve dehors, dans le salon ou dans la chambre respectivement, après n déplacements. En particulier $X_0 = 1$. Toujours pour $n \in \mathbb{N}$, on note

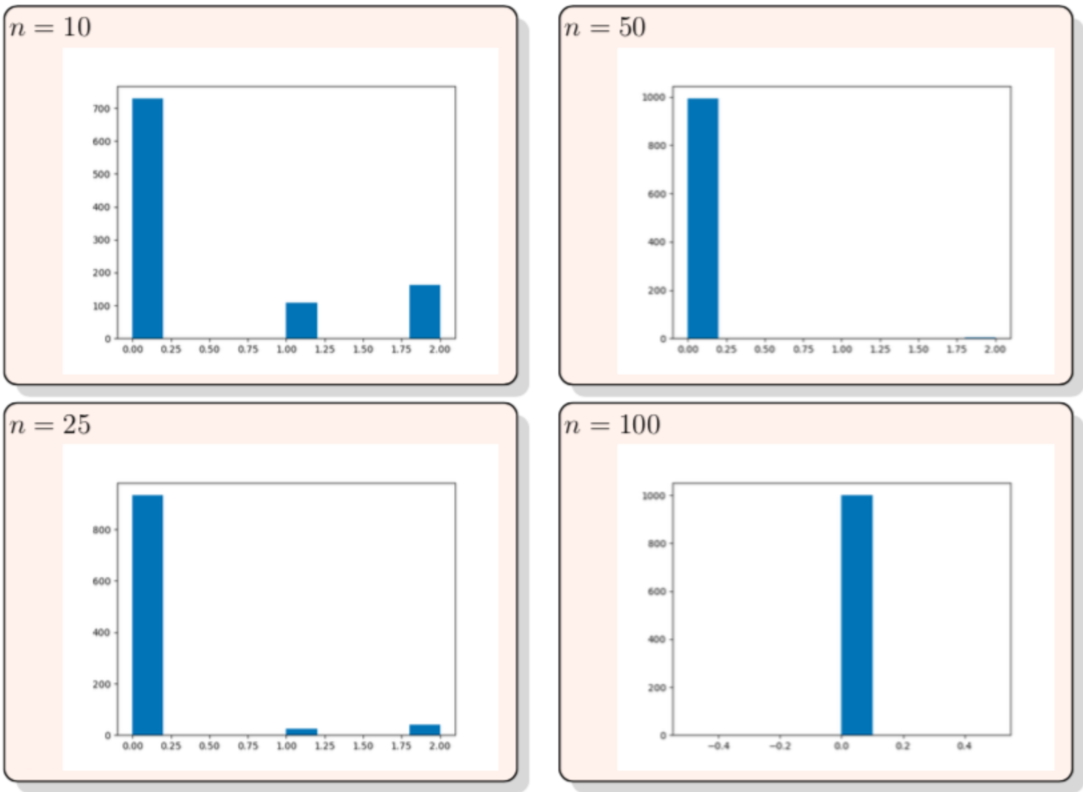
$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Représenter le protocole de déplacement de la mouche à l'aide d'un graphe ayant pour sommets les entiers de l'intervalle $[\![0, 2]\!]$. Le sommet 0 est associé au salon, le somme 1 est associé à la chambre et le somme 2 est associé à l'extérieur de la maison. Ajouter les probabilités correspondants au niveau des arcs de ce graphe.
2. Écrire le graphe de la matrice d'adjacence A c'est à dire la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ où pour tout $(i, j) \in [\![0, 2]\!]^2$, $a_{i,j}$ désigne la probabilité que la mouche aille du lieu i au lieu j.

   Que vaut $A\Pi$. Écrire une relation entre U_n, A et Π que l'on démontrera.
3. a. Écrire une fonction Python `simul_X(n)` qui simule n déplacements de la mouche et renvoie la trajectoire X_n.

b. On rajoute les instructions suivantes et on fait varier n en prenant les valeurs $n = 10, n = 25$ et $n = 50$, ce qui permet d'obtenir les figures ci-jointes. Que peut-on conjecturer ?

```python
n=10 #puis n=25 puis n=50 puis n=100
sample=[simul_X(n)[n-1] for k in range(1000)]
plt.hist(sample)
plt.show()
```



Exercice 51 (Costaud)**.** Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (carreau et cour), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie 1 - Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge.

1. Simulation avec Python.

   (a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable X.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n):
  y=1
  T=2*n # nombre de cartes a retourner
   while ........... :
      ..............
      ..............
   return ..............
```

   (b) On suppose que l'on dispose de fonction tri(L) qui, pour une liste de valeurs L renvoie une liste triée par ordre croissant (les éléments étant éventuellement répétés s'ils apparaissent plusieurs fois dans la liste initiale). Écrire une fonction tab_freq(L) qui, prenant en argument une liste de valeurs L renvoie une première ligne correspondant aux différentes valeurs de L et une deuxième ligne correspondant aux fréquences d'apparition de chaque valeur dans la liste.

   (c) On prend $n = 16$. On ajoute les commandes suivantes qui permettent l'affichage ci-après.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

sample=[simul_X(16) for k in range (1000)]
T=tab_freq(sample)
plt.bar(T[0], T[1])
plt.show()
```

i. Quelles instructions permettent d'obtenir une estimation de $E(X)$?

ii. Donner une estimation graphique de $P(X=1)$. Que vaut vraiment $P(X=1)$?

2. Que vaut $X(\Omega)$?
3. Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X=k)=\frac{2n-k}{n(2n-1)}$$

4. Montrer que $E(X)=\frac{2n+1}{3}$.

Le joueur perd un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a-k$.

5. Exprimer G_1 en fonction de a et X. En déduire l'expression de $E\left(G_1\right)$ en fonction de a et n.
6. Avec quelles instructions supplémentaires peut-on simuler G_1 ?

Partie 2 - Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur perd un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la kème carte découverte $(k \leqslant n), G_2$ est égale à $a-k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

7. Écrire, en reprenant une partie du programme précédent, une fonction `simul_G_2(a,n)`, qui simule la variable G_2.
8. Pour tout entier $k \in 1;n$, déterminer $P\left(G_2=a-k\right)$.
9. Vérifier que :

$$P\left(G_2=-n\right)=\frac{n-1}{2(2n-1)}$$

Obtenir alors que

$$E\left(G_2\right)=\frac{3(3n-1)a-\left(7n^2-1\right)}{6(2n-1)}$$

On suppose le jeu constitué de 32 cartes $(n=16)$. Déterminer (éventuellement avec l'aide de Python), selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Éléments de correction

Exercice 1 :